DİZİLER

Tanım kümesi pozitif tamsayılar olan her fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre adlandırılırlar. Değer kümesi reel sayılar olan dizilere reel sayı dizisi denir.

$f : N^+ \rightarrow R$, $f(n) = a_n$ olsun.

f fonksiyonunun değer kümesinin elemanları:

$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$, ...

olmak üzere f dizisi

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...)$ şeklinde yazılabilir.

$f(1) = a_1$ dizinin 1. terimi

$f(2) = a_2$ dizinin 2. terimi

$f(3) = a_3$ dizinin 3. terimi

⋮

$f(n) = a_n$ dizinin n. terimi

⋮

- NOT: Dizinin sonlu sayıda teriminin verilmesi diziyi tanımlamaz . Dizinin tanımlı olabilmesi için genel terimin de verilmesi gerekir.
- Örnek 1:

Genel terimi $(a_n) = (n!)$ olan dizi

$(a_n) = (1, 2, 6, \ldots, n!, \ldots)$ dir.

Genel terimi $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ olan dizi

$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ dir.

- Örnek 2

Aşağıda verilen ifadelerden hangisi bir dizi belirtir?

A) $(a_n) = \left(\frac{2n+3}{n-2}\right)$

B) $(b_n) = \left(\frac{n-2}{2n+3}\right)$

C) $(c_n) = (\ln(n-1))$

D) $(d_n) = \left(\sqrt{n^2-9}\right)$

E) $(e_n) = (\cot n)$

- Çözüm

A) $n = 2$ için $\frac{2n+3}{n-2}$ ifadesi tanımsız olduğundan a_n bir dizinin genel terimi olamaz.

B) $n = -\frac{3}{2}$ için $\frac{n-2}{2n+3}$ ifadesi tanımsızdır. Ancak $-\frac{3}{2} \notin N^+$ olduğundan b_n bir dizinin genel terimi olabilir.

C) $n = 1$ için $\ln(n-1)$ ifadesi tanımsız olduğundan c_n bir dizinin genel terimi olamaz.

D) $n = 1$ ve $n = 2$ için $\sqrt{n^2 - 9}$ ifadesi tanımsız olduğundan d_n bir dizinin genel terimi olamaz.

E) $n = 180°$ için $\cot n = \frac{\cos n}{\sin n}$ ifadesi tanımsız olduğundan e_n bir dizinin genel terimi olamaz.

Cevap B

SONLU DİZİ

SONLU DİZİ

$A_P = \{1, 2, 3, ..., p\} \subset Z^+$ olmak üzere, A_p kümesinden reel sayılara tanımlanan her fonksiyona **p terimli sonlu dizi** denir.

Örnek 3

$A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

$f : A_4 \rightarrow R$ ve $f(n) = n^{n-1} + 2n$ olsun.

$(a_n) = (n^{n-1}+2n)$ sonlu dizisininin terimleri toplamı kaçtır?

A) 104 B) 96 C) 83 D) 72 E) 69

Çözüm

$$a_n = n^{n-1} + 2n \Rightarrow a_1 = 1^0 + 2.1 = 3$$

$$a_2 = 2^1 + 2.2 = 6$$

$$a_3 = 3^2 + 2.3 = 15$$

$$a_4 = 4^3 + 2.4 = 72$$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 + 6 + 15 + 72 = 96$ bulunur.

Cevap B

SABİT DİZİ

Bütün terimleri birbirine eşit olan dizilere sabit dizi denir.

Başka bir ifadeyle, $c \in R$ olmak üzere, $\forall n \in N^+$ için $a_n = c$ ise (a_n) dizisine **sabit dizi** denir.

Örneğin;

$(a_n) = (\cos n\pi)$ dizisi

$n = 1 \Rightarrow a_1 = \cos\pi = -1$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = \cos 2\pi = 1$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = \cos 3\pi = -1$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = \cos 4\pi = 1$

$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ olduğundan sabit bir dizi değildir.

- Örnek 4

$(a_n) = \left(\frac{2n-3}{5n+k}\right)$ dizisi sabit dizi ise **k kaçtır?**

A) $-\frac{15}{2}$ B) $-\frac{10}{3}$ C) $-\frac{5}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

- Çözüm

$(a_n) = \left(\frac{2n-3}{5n+k}\right)$ dizisinin sabit dizi olması için pay ve paydadaki aynı dereceli terimlerin katsayıları oranı birbirine eşit olmalıdır.

$\frac{2}{5} = -\frac{3}{k} \Rightarrow 2k = -15 \Rightarrow k = -\frac{15}{2}$ bulunur.

Cevap A

DİZİLERİN EŞİTLİĞİ

(a_n) ve (b_n) iki reel sayı dizisi olsun.

$\forall n \in N^+$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) dizisi (b_n) dizisine eşittir denir.

$(a_n) = (b_n)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 5

$(a_n) = (\cos n\pi)$ ve $(b_n) = ((-1)^n)$ dizileri eşit midir?

Çözüm

$(a_n) = (\cos n\pi) \Rightarrow (a_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots)$

$(b_n) = ((-1)^n) \Rightarrow (b_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots)$

$\forall n \in N^+$ için $a_n = b_n$ olduğundan $(a_n) = (b_n)$ dir.

DİZİLERDE İŞLEMLER

(a_n) ve (b_n) birer reel sayı dizisi ve $k \in R$ olsun.

1. $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$
2. $(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$
3. $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$
4. $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) \quad (b_n \neq 0)$
5. $k.(a_n) = (k.a_n)$

Örnek 6

$(a_n) = \left(\dfrac{n+1}{2n+6}\right)$ ve $(b_n) = \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$ olarak veriliyor.

Buna göre, $\dfrac{2.(a_n) + (b_n)}{(a_n).(b_n)}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$$\frac{2.(a_n)+(b_n)}{(a_n).(b_n)}=\left(\frac{2.a_n+b_n}{a_n.b_n}\right)=\left(\frac{2.\frac{n+1}{2n+6}+\frac{n+2}{n+3}}{\frac{n+1}{2n+6}.\frac{n+2}{n+3}}\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{2n+3}{n+3}}{\frac{(n+1).(n+2)}{2.(n+3).(n+3)}}\right)=\left(\frac{4n^2+18n+18}{n^2+3n+2}\right)$$

Örnek 7

Genel terimleri,

$$(a_n) = \begin{cases} n+1, & n < 5 \\ 3n-2, & n \geqslant 5 \end{cases} \quad \text{ve} \quad (b_n) = \begin{cases} 1-3n, & n < 8 \\ n^2-n+2, & n \geqslant 8 \end{cases}$$

olan dizilerin toplamını bulunuz.

Çözüm

Tanım kümeleri ortak olacak şekilde (b_n) dizisini düzenlersek,

$$b_n = \begin{cases} 1 - 3n, & n < 5 \\ 1 - 3n, & 5 \leqslant n < 8 \\ n^2 - n + 2, & n \geqslant 8 \end{cases} \quad \text{olur.}$$

$$a_n + b_n = \begin{cases} n + 1 + 1 - 3n, & n < 5 \\ 3n - 2 + 1 - 3n, & 5 \leqslant n < 8 \\ 3n - 2 + n^2 - n + 2, & n \geqslant 8 \end{cases}$$

$$a_n + b_n = \begin{cases} 2 - 2n, & n < 5 \\ -1, & 5 \leqslant n < 8 \\ n^2 + 2n, & n \geqslant 8 \end{cases}$$

MONİTÖR DİZİLER

- KURAL

(a_n) dizisinde $\forall\, n \in N^+$ için,

1. $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow (a_n)$ artan dizi
2. $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow (a_n)$ azalan dizi
3. $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow (a_n)$ azalmayan dizi
4. $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow (a_n)$ artmayan dizi
5. $a_{n+1} = a_n \Leftrightarrow (a_n)$ sabit dizi

Bu şartları sağlayan diziler monoton dizilerdir

- KURAL

1. $\forall\, n \in N^+$ için $a_{n+1} - a_n > 0$ ise (a_n) monoton artan dizidir.
2. $\forall\, n \in N^+$ için $a_{n+1} - a_n < 0$ ise (a_n) monoton azalan dizidir.

Örnek 8

a. $(a_n) = \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)$ **b.** $(b_n) = \left(\frac{n+4}{n+2}\right)$

dizilerinin monotonluğunu araştıralım.

a.
$$a_{n+1} - a_n = \frac{3.(n+1)+2}{(n+1)+1} - \frac{3n+2}{n+1}$$
$$= \frac{3n+5}{n+2} - \frac{3n+2}{n+1}$$
$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \qquad (n \in N^+)$$

$a_{n+1} - a_n > 0$ olduğundan (a_n) monoton artandır.

b.
$$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)+4}{(n+1)+2} - \frac{n+4}{n+2}$$
$$= \frac{n+5}{n+3} - \frac{n+4}{n+2}$$
$$= \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0 \qquad (n \in N^+)$$

$b_{n+1} - b_n < 0$ olduğundan (b_n) monoton azalandır.

- KURAL

(a_n) pozitif terimli bir dizi olsun.

1. $\forall n \in N^+$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ise (a_n) monoton artandır.

2. $\forall n \in N^+$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ise (a_n) monoton azalandır.

Bu kural özellikle üstel ifade veya faktöriyel içeren dizilerin monotonluğunu araştırmada kolaylık sağlar.

Örnek 9

a. $(a_n) = \left(\dfrac{(n+3)!}{3^{n+1}}\right)$ **b.** $(b_n) = \left(\dfrac{n!}{2^n}\right)$

dizilerinin monotonluğunu araştıralım.

a. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+4)!}{3^{n+2}}}{\dfrac{(n+3)!}{3^{n+1}}} = \frac{(n+4)!}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{(n+3)!}$$

$$= \frac{n+4}{3} > 1 \quad (n \in N^+)$$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ olduğundan (a_n) monoton artandır.

b. $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{2^n}} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2}$$

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{n+1}{2} \geq 1$ olduğundan (b_n) monoton azalmayandır.

- KURAL

$\forall n \in N^+$ için $(a_n) = \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)$ dizisinde

1. $-\frac{d}{c} > 1$ ise (a_n) monoton değildir.

2. $-\frac{d}{c} < 1$ ise (a_n) monotondur.

★ $ad - bc > 0$ ise (a_n) monoton artandır.

★ $ad - bc < 0$ ise (a_n) monoton azalandır.

★ $ad - bc = 0$ ise (a_n) sabit dizidir.

3. $-\frac{d}{c} = 1$ ise ifade dizi belirtmez.

ARİTMETİK DİZİ

ARİTMETİK DİZİ

Ardışık terimleri arasındaki fark sabit bir sayıya eşit olan dizilere aritmetik dizi denir.

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ dizisi bir aritmetik dizi ise,

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = d$ olup

d sayısına aritmetik dizinin ortak farkı denir.

Örnek 10

$(a_n) = (3n + 1) = (4, 7, 10, ..., 3n + 1, ...)$

(a_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki fark eşit olduğundan (a_n) bir aritmetik dizidir. $(d = 3)$

Örnek 11

$(b_n) = (n^2 - 1) = (0, 3, 8, 15, ..., n^2 - 1, ...)$

(b_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki fark eşit olmadığından (b_n) aritmetik bir dizi değildir.

$$\begin{aligned} d = a_n - a_{n-1} &= (n^2 - 1) - ((n-1)^2 - 1) \\ &= n^2 - 1 - (n^2 - 2n + 1 - 1) \\ &= n^2 - 1 - n^2 + 2n \\ &= 2n - 1 \text{ (d sabit değil n ye bağlı)} \end{aligned}$$

- KURAL

İlk terimi a_1 ve ortak farkı d olan bir aritmetik dizinin genel terimi,

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ dir.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ dir.

Örnek 12

İlk terimi – 5 ve ortak farkı 4 olan bir aritmetik dizinin terimini bulunuz.

Çözüm

$a_1 = -5, \quad d = 4$

$a_n = a_1 + (n-1).d \Rightarrow a_n = -5 + (n-1).4$

$\Rightarrow a_n = 4n - 9$ bulunur.

Aritmetik Dizinin Özellikleri

1. Bir aritmetik dizide p. terim a_p, k. terim a_k ise bu dizinin ortak farkı,

$$d = \frac{a_k - a_p}{k - p} \text{ dir.}$$

2. Bir aritmetik dizide her terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasına eşittir.

$$a_p = \frac{a_{p-k} + a_{p+k}}{2} \text{ dir.}$$

3. Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimler toplamı birbirine eşittir.

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_p + a_{n-p+1}$

4. a ve b sayıları arasına bunlarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde n tane terim yerleştirilirse dizinin ortak farkı,

$\mathbf{d = \frac{b-a}{n+1}}$ olur.

5. Bir aritmetik dizide ilk n terim toplamı S_n ise,

$\mathbf{S_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_n] = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1)d]}$ dir.

Örnek 13

$a + 6$, $2a + 8$, $a + 24$ terimleri aritmetik bir dizinin ilk üç terimi ise bu dizinin 5. terimi kaçtır?

A) 7 B) 13 C) 22 D) 40 E) 49

Çözüm

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 2a + 8 = \frac{a + 6 + a + 24}{2}$$

$$\Rightarrow 4a + 16 = 2a + 30$$

$$\Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7 \text{ dir.}$$

$a_1 = 13$, $a_2 = 22$, $a_3 = 31$

$d = a_2 - a_1 = 22 - 13 = 9$ dur.

$a_5 = a_1 + 4d = 13 + 4.9 = 49$ bulunur.

Cevap E

GEOMETRİK DİZİ

- Ardışık terimleri arasındaki oran sabit bir sayıya eşit olan dizilere geometrik dizi denir.

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ldots = r \text{ (r ortak çarpan) dir.}$$

Örnek 14

$(a_n) = (3n) = (3,6,9, ..., 3n,...)$ dizisinde

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2, \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

ardışık terimler arasındaki oran sabit olmadığından (a_n) geometrik bir dizi değildir.

Örnek 15

$(a_n) = (3^n) = (3,9,27, ..., 3^n, ...)$ dizisinde

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{3} = 3, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{27}{9} = 3, ...$$

ardışık terimler arasındaki oran sabit olduğundan (a_n) geometrik bir dizidir.

- Kural

İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan bir geometrik dizinin genel terimi: $a_n = a_1.r^{n-1}$ dir.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.r$$

$$a_3 = a_2.r = (a_1.r).r = a_1.r^2$$

$$a_4 = a_3.r = (a_1.r^2).r = a_1.r^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$a_n = a_1.r^{n-1}$ dir.

Örnek 16

3. Terimi ½ ve 8. terimi 16 olan bir geometrik dizinin genel terimini ve 5. terimini bulunuz.

Çözüm

$$a_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1.r^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_8 = 16 \Rightarrow a_1.r^7 = 16$$

$$\frac{a_8}{a_3} = \frac{a_1.r^7}{a_1.r^2} = \frac{16}{\frac{1}{2}} \Rightarrow r^5 = 32$$

$$\Rightarrow r = 2 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{8} \text{ dir.}$$

$$a_n = a_1.r^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{8}.2^{n-1} = 2^{n-4} \text{ bulunur.}$$

$$a_n = 2^{n-4} \Rightarrow a_5 = 2^{5-4} = 2^1 = 2 \text{ bulunur.}$$

1. Bir geometrik dizide k. terim a_k, p. terim a_p olsun. Bu durumda ortak çarpan,

   $r = \sqrt[p-k]{\frac{a_p}{a_k}}$ olur. $(p > k)$

2. Sonlu bir geometrik dizide her terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin geometrik ortalamasına eşittir.

   $a_p = \sqrt{a_{p-k} \cdot a_{p+k}}$

3. Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin çarpımı birbirine eşittir.

   $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ ise

   $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots = a_p \cdot a_{n-p+1}$ dir.

4. a ile b arasına bu sayılarla birlikte geometrik dizi oluşturacak şekilde n tane terim yerleştirilirse bu dizinin ortak çarpanı : $r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ olur.

5. Bir dizi hem aritmetik hem de geometrik bir dizi ise bu dizi sıfırdan farklı sabit bir dizidir.

6. Bir geometrik dizide ilk n terim toplamı T_n ise,

   $T_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$ dir.

$$T_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$= a_1 + (a_1.r) + (a_1.r^2) + \ldots + (a_1.r^{n-1})$$

$$= a_1(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$

$$= a_1.\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) \text{ dir.}$$

- Örnek 17

Bir geometrik dizinin ardışık ilk üç terimi sırasıyla

$x - 2, x, x + 4$ olduğuna göre, **bu dizinin 4. terimi kaçtır?**

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

Çözüm

$a_2 = \sqrt{a_1.a_3} \Rightarrow a_2^2 = a_1.a_3$ olduğundan

$x^2 = (x - 2)(x + 4) \Rightarrow x^2 = x^2 + 2x - 8$

$\Rightarrow 2x = 8$

$\Rightarrow x = 4$ tür.

$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 16 \quad (r = 2)$

Cevap E

BENİ DİNLEDİĞİNİZ İÇİN TEŞEKKÜR EDERİM

DİLARA SARAN KARA